はさみうちの原理を用いての $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ の証明

証明のコツ

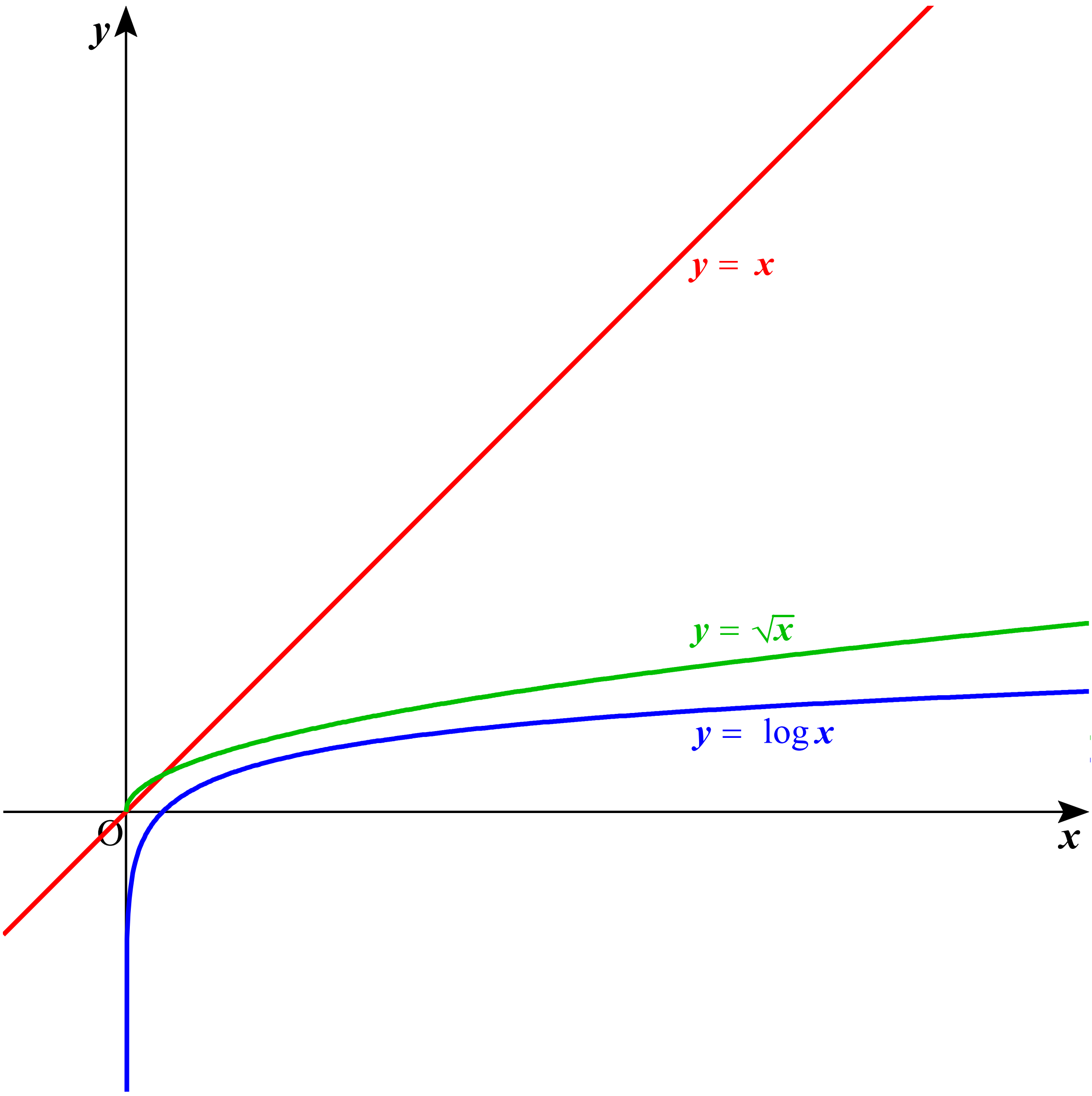
指数関数，対数関数，三角関数はそのままでは扱いにくいので，

$y=x^a$ （a は $\log x<x^a<x$ を満たす適当な実数）を用いて

$0<\frac{\log x}{x}<\frac{x^a}{x}\xrightarrow{x\to\infty}0$ から $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を導く。

下図より，$\sqrt{x}$ が扱いやすく，さらに微分したあとの処理を楽にするために

$2\sqrt{x}$ としたほうがよさそうだ。



証明

$g(x)=2\sqrt{x}-\log x\ (x>0)$ とすると，$g'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$ より，$g(x)$ の増減は次のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	/	$-$	0	$+$
$g(x)$	/	$\downarrow$	2	$\uparrow$

よって，$g(x)>0$ すなわち $2\sqrt{x}>\log x$

これより，$0<\dfrac{\log x}{x}<\dfrac{2\sqrt{x}}{x}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$ だから，はさみうちの原理により，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$

$x=e^t$ とおくと，$x\to\infty$ ならば $t\to\infty$ だから，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\log e^t}{e^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}$$

これと $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ より，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}=0$　$\displaystyle\therefore\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$